Compositio Mathematica **108:** 247–275, 1997.

Propriétés arithmétiques d'une famille de surfaces K3

HERVÉ BILLARD
Université Paris 7, U.F.R. de Mathématiques, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France; e-mail: billard@mathp7.jussieu.fr

Received 25 September 1995; accepted in final form 4 June 1996

Résumé. Nous étudions une famille de surfaces K3 admettant un gros groupe d'automorphismes. D'abord nous étendons des résultats de Silverman: construction de hauteurs canoniques, densité des points rationnels d'une orbite, . . . etc. On poursuit l'étude en estimant la densité des points rationnels des orbites paramétrées par une courbe rationnelle; l'estimée est compatible avec la conjecture de Batyrev–Manin. Enfin, on détermine sous des hypothèses géométriques supplémentaires, le nombre de points rationnels de ces surfaces de hauteur bornée.

Abstract. We study a family of K3 surfaces which have a big automorphism group. We begin with generalisations of Silverman's results: construction of canonical heights, density of rational points in one orbit,. . . We continue the study in estimating the density of rational points on the orbiting rational curves; this estimate is compatible with Batyrev–Manin conjecture. Moreover we settle, under more geometric hypothesis, the number of rational points of such surfaces of bounded height.

Mathematics Subject Classification (1996): 11G35, 14G05, 14G25, 14J28.

Key words: Surface K3, orbite, hauteur.

0. Introduction

Motivé par une conjecture de Bogomolov et une conjecture de Batyrev–Manin, nous proposons ici d'étudier la répartition des points k-rationnels, k corps de nombres, d'une certaine famille de surfaces K3. Cette étude est inspirée de celle de Jospeh Silverman dans [Si91].

Plus précisément, nous allons étudier la géométrie de surfaces K3 lisses de degré $(2, 2, 2)$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Ces surfaces admettent un sous-groupe d'automorphismes $\mathcal{A}$, isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ de trois groupes cycliques d'ordre 2, et sont fibrées en courbes elliptiques au dessus de $\mathbb{P}^1$. De cette étude géométrique, nous déduirons diverses informations sur les points k-rationnels.

Si G est un sous-groupe de $\mathcal{A}$, P un point k-rationnel de S, nous considérons l'orbite de P sous l'action de G

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_G(P) = \{\phi P \mid \phi \in G\}.$$

Il est naturel de s'intéresser à la description des points k-rationnels de $\mathcal{C}$, et ensuite, à la réunion des orbites $\mathcal{C}$. Nous allons voir comment, suivant le choix de G, la réponse à ce problème varie.

Dans un premier temps, nous allons étudier l'action d'un sous-groupe cyclique infini $G = \langle\sigma\rangle$ admettant les mêmes propriétés que le sous-groupe $\mathcal{A}$ des automorphismes des surfaces K3 étudiées par Silverman dans [Si91].

Un des outils fondamentaux sera la *théorie des hauteurs* (voir par exemple Chap. 3 et 4 de [La83] ou Chap. 6 de [Co-Si86]). Nous démontrerons qu'il existe des hauteurs canoniques h_1 et h_2 associées à des classes de diviseurs de $\mathrm{Pic}(S)\otimes\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout point P de $S(\bar{k})$

$$h_1(\sigma P) = (9+4\sqrt{5})h_1(P), \qquad h_2(\sigma^{-1}P) = (9+4\sqrt{5})h_2(P).$$

De plus, la hauteur

$$\hat{h} = h_1 + h_2$$

est une hauteur de Weil associée à une classe de diviseurs amples que nous noterons E.

Les hauteurs h_1 et h_2 ont de nombreuses propriétés communes aves la hauteur de Néron–Tate d'une variété abélienne. Par exemple, pout tout point P de $S(\bar{k})$ nous avons

$$h_1(P) \geqslant 0 \quad \text{et} \;\; h_2(P) \geqslant 0.$$

De plus

$$h_1(P) = 0 \Longleftrightarrow h_2(P) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{C}_G(P) \quad \text{est finie.}$$

Nous définissons la hauteur d'une orbite $\mathcal{C}$ par $h(\mathcal{C}) = \sqrt{h_1(P)h_2(P)}$, qui est en fait indépendante du choix du point P de $\mathcal{C}$. Nous n'avons pas pris la même définition que Silverman (dans [Si91], $h(\mathcal{C}) = h_1(P)h_2(P)$) par commodité.

Remarquons que $h(\mathcal{C}) = 0$ si et seulement si $\mathcal{C}$ est de cardinal fini, ce qui nous permettra de démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'orbites de cardinal fini. D'autre part, nous verrons que $h(\mathcal{C})$ apparaît dans la formule de comptage suivante lorsque $h(\mathcal{C}) > 0$

$$\mathrm{card}\{P\in\mathcal{C} \mid \hat{h}(P) \leqslant B\} \;=\; 2\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{B}{2h(\mathcal{C})} + \xi(\mathcal{C})$$
$$(\alpha = 9+4\sqrt{5},\;\; |\xi(\mathcal{C})| \leqslant 2).$$

Tous les résultats ci-dessus sont analogues à ceux de [Si91]. Rappelons également que le problème de la densité, pour la topologie réelle, des points $\mathbb{Q}$-rationnels des surfaces que nous considérons, a été étudié par Wang [Wa94].

Nous esquissons ensuite l'étude de la réunion des orbites $\mathcal{C}$ de $S(k)$ qui n'est pas abordée dans [Si91] (note: $\bigcup_{\mathcal{C}\subset S(k)}\mathcal{C} = S(k)$). Plus précisément, nous verrons qu'il existe des courbes rationnelles T sur S, correspondant aux fibres singulières. En supposant que T est k-rationnelle, nous étudierons alors la famille des orbites $\mathcal{C}$ de $S(k)$ paramétrées par T (égal à l'orbite de $T(k)$ sous l'action de G). Cette étude s'apparente à l'étude des points des sections d'une surface elliptique, liée à l'action du groupe de la fibre générique (cf. par exemple [Ca94] et [Si83]).

Nous verrons que l'on peut définir des 'degrés canoniques' ayant des proprietés similaires aux hauteurs canoniques h_1 et h_2. Ces 'degrés canoniques' nous permettront d'établir, entre autre, que pour de telles orbites, dès que $h(\mathcal{C})$ est suffisamment grande, nous avons

$$\mathrm{card}\{P \in \mathcal{C} \cap T(k)\} = 1.$$

Nous en déduirons le comportement asymptotique de $\mathrm{card}\{\mathcal{C} \mid h(\mathcal{C}) \leqslant B\}$ pour les orbites $\mathcal{C}$ paramétrées par T.

D'autre part, nous établirons l'existence d'une courbe ϕT ($\phi \in G$) de E-degré minimal telle que, si nous notons Γ la réunion des orbites $\mathcal{C}$ paramétrées par T, nous ayons

$$\mathrm{card}\{P \in \Gamma(k) \mid \hat{h}(P) \leqslant B\} \sim \chi(\Gamma)\mathrm{card}\{P \in \phi T(k) \mid \hat{h}(P) \leqslant B\},$$

(où $\chi(\Gamma)$ est égal à un ou deux) traduisant la répartition géométrique des points de 'petites hauteurs' des orbites $\mathcal{C}$ de Γ; l'estimée est compatible avec la conjecture de Batyrev–Manin.

Finalement, nous déterminerons, pour la première fois à notre connaissance, le comportement asymptotique de $\mathrm{card}\{P \in S(k) \mid h_D(P) \leqslant B\}$, pour certaines surfaces de notre famille admettant des propriétés géométriques supplémentaires, et pour une famille de diviseurs amples D, compatible avec la conjecture de Batyrev–Manin.

Résumons l'organisation de ce travail. Le paragraphe 1 est consacré à l'étude géométrique de S. Au paragraphe 2, nous donnons les théorèmes similaires à ceux de [Si91] et voyons l'importance du choix du sous-groupe d'automorphismes. Le paragraphe 3 est l'étude d'une famille d'orbites paramétrées par une courbe k-rationnelle. Au Paragraphe 4, nous estimons dans certains cas $\mathrm{card}\{P \in S(k) \mid h_D(P) \leqslant B\}$.

Nous remercions Marc Hindry, avec qui nous avons eu de nombreuses et fructueuses discussions tout au long de l'élaboration de ce travail.

1. Notations et géométrie de quelques surfaces K3

Fixons le cadre de travail, ainsi que nos notations.

k: un corps de nombres

S: une surface lisse définie sur k, contenue dans $\mathbb{P}^1_1 \times \mathbb{P}^1_2 \times \mathbb{P}^1_3$, définie par une section de $O(2,2,2)$. En d'autres termes, S est définie par un polynôme tri-homogène de degré 2

$$\sum_{i,j,k,l,m,n} a_{ijklmn} X_1^i X_2^j Y_1^k Y_2^l Z_1^m Z_2^n = 0,$$

avec: $i+j=k+l=m+n=2$, $(X_1,X_2;Y_1,Y_2;Z_1,Z_2) \in \mathbb{P}^1_1 \times \mathbb{P}^1_2 \times \mathbb{P}^1_3$.

p_1, p_2, p_3: les projections $p_i\colon S \to \mathbb{P}^1_i$ induites par les projections naturelles de $\mathbb{P}^1_1 \times \mathbb{P}^1_2 \times \mathbb{P}^1_3 \to \mathbb{P}^1_i$.

π_{12}, π_{13}, π_{23}: les projections $\pi_{ij}\colon S \to \mathbb{P}^1_i \times \mathbb{P}^1_j$ induites par les projections naturelles de $\mathbb{P}^1_1 \times \mathbb{P}^1_2 \times \mathbb{P}^1_3 \to \mathbb{P}^1_i \times \mathbb{P}^1_j$.

D_1, D_2, D_3: les classes de diviseurs de $\mathrm{Pic}(S)$ définies par

$$D_i = p_i^*\{\infty\}.$$

σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}: les automorphismes de S qui sont les involutions σ_{ij} induites par le revêtement double π_{ij}.

σ: l'automorphisme de S défini par: $\sigma = \sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{23}$.

$\mathcal{A}$: sous-groupe de $\mathrm{Aut}(S)$ engendré par σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}.

G: sous-groupe cyclique de $\mathcal{A}$ engendré par σ.

Soit P un point k-rationnel, considérons son orbite sous l'action de G

$\mathcal{C} := \mathcal{C}_G(P) = \{\phi P \mid \phi \in G\}$.

E, E_1, E_2: les classes de diviseurs de $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{R}$ définies par

$$E_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} D_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} D_2 + D_3,$$
$$E_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} D_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} D_2 + D_3,$$
$$E = E_1 + E_2 = D_1 + D_2 + 2D_3.$$

$\alpha := 9 + 4\sqrt{5}$.

H_D: une hauteur de Weil exponentielle associée à une classe de diviseurs D de $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{R}$ (voir par exemple Chap. 3 et Chap. 4 de [La83], ou Chap. 6 de [Co-Si86]).

$h_D := \mathrm{Log}\, H_D$.

Pour faciliter l'écriture de nos comptages, toute hauteur associée à un diviseur ample, h_D, est choisie de telle manière que $h_D > 0$.

D'autre part, pour mieux mettre en évidence les propriétés géométriques des points rationnels de S, toutes les hauteurs considérées ne sont pas normalisées par rapport au corps de nombres; ce qui nous force à travailler sur un corps de nombres fixé.

$N(X, f, B)$: la fonction de comptage définie par

$$N(X, f, B) = \text{card}\{x \in X \mid f(x) \leqslant B\}.$$

Une telle surface S, étant simplement connexe et ayant son diviseur canonique nul ($\omega = O(2-2, 2-2, 2-2)$), est une surface $K3$. Elle est citée par Wehler dans [Wel-88], où il étudie la géométrie des surfaces K3 considérées par Silverman dans [Si91]. Elle est également étudiée par Wang dans [Wa94].

Démontrons que S est une surface elliptique.

LEMME 1.1. *La projection* $p_i: S \to \mathbb{P}^1$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ *admet pour fibres des courbes de genre arithmétique* 1.

DEMONSTRATION. La surface S étant une surface K3, son diviseur canonique ω est trivial. Ainsi par la formule de l'adjonction, si C est une fibre de $p_i: S \to \mathbb{P}^1$, on a

$$\begin{aligned} 2p_a(C) - 2 &= C \cdot C \qquad (\omega = 0) \\ &= 0 \qquad\qquad (C \text{ est une fibre}), \end{aligned}$$

d'où $p_a(C) = 1$. □

Nous donnons ultérieurement (Proposition 1.4.) un critère sur l'existence de sections de $p_i: S \to \mathbb{P}^1$. Pour ce faire, étudions le groupe de Picard de S et le groupe d'automorphismes de S.

La surface S est un revêtement double de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et le sous-groupe d'automorphismes $\mathcal{A}$ de $\text{Aut}(S)$ engendré par σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ de 3 groupes cycliques d'ordre 2 [Wel-88].

LEMME 1.2. *Les* σ_{ij} *sont des isomorphismes* $((i, j) \in \{1, 2, 3\}^2,\ \ i < j)$.

DEMONSTRATION. Puisque S est une surface minimale ($\omega = 0$, donc pour toute courbe C, C^2 est paire) non réglée, toute application birationnelle est un isomorphisme (voir par exemple le Théorème 5.19 dans [Be78]). □

Ce lemme est fondamental pour l'étude arithmétique de S où nous utilisons les propriétés fonctorielles des hauteurs. Lorsque S est un membre général de la famille des surfaces considérées, [We2-88], on peut déterminer $\text{Aut}(S)$ et $\text{Pic}(S)$ comme l'a souligné Wehler.

PROPOSITION 1.3 [We1-88]. *Soit S un membre général de la famille des surfaces plongées dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ définies par une section de $O(2,2,2)$. Alors*

(i) $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$.
(ii) $\mathrm{Aut}(S)$ *est engendré par* σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}.

Remarquons que pour notre étude arithmétique des orbites d'une surface S définie par une section de $O(2,2,2)$, il n'est pas nécessaire de savoir que S est un membre général de la famille: il est suffisant de savoir que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(S)$.

DEMONSTRATION. Nous nous bornons à démontrer succinctement (i). L'assertion (ii) découle de (i) (cf. [Wel-88], dont on peut trouver une démonstration dans [Wa94]). Posons

$Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,
Ω_Z: le faisceau des 1-formes différentielles de Z,
$\omega_Z = \Omega_Z^3$ le faisceau canonique de Z.

Pour démontrer (i), il suffit de vérifier les critères du Théorème 5.5 de [We2-88] à savoir

(i) $H_1(Z,\mathbb{Z}) = 0$.
Puisque $H_1(\mathbb{P}^1,\mathbb{Z}) = 0$, (i) est vérifié par Künneth.

(ii) $H^1(Z, \omega_Z \otimes O(2,2,2)) = 0$.
Or, $\omega_Z = O(-2,-2,-2)$, $\omega_Z \otimes O(2,2,2) = O(0,0,0)$. Donc, par Künneth, (ii) est vérifié.

(iii) $H^1(Z, \Omega_Z^2 \otimes O(2,2,2)) = 0$.
Nous avons

$$\begin{aligned}\Omega_Z &= p_1^*\Omega_{\mathbb{P}^1} \oplus p_2^*\Omega_{\mathbb{P}^1} \oplus p_3^*\Omega_{\mathbb{P}^1}\\ &= O(-2,0,0) \oplus O(0,-2,0) \oplus O(0,0,-2).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Omega_Z^2 &= \Lambda^2 O(-2,0,0) \oplus \Lambda^2 O(0,-2,0) \oplus \Lambda^2 O(0,0,-2)\\ &\quad \oplus O(-2,-2,0) \oplus O(-2,0,-2) \oplus O(0,-2,-2)\\ &= O(-2,-2,0) \oplus O(-2,0,-2) \oplus O(0,-2,-2),\end{aligned}$$

ou encore

$$\Omega_Z^2 \otimes O(2,2,2) = O(0,0,2) \oplus O(0,2,0) \oplus O(2,0,0),$$

d'où

$$\begin{aligned}H^1(Z, \Omega_Z^2 \otimes O(2,2,2)) &= H^1(Z, O(0,0,2)) \oplus H^1(Z, O(0,2,0))\\ &\quad \oplus H^1(Z, O(2,0,0)).\end{aligned}$$

Or, par Künneth nous avons

$$H^*(Z, O(0,0,2)) \simeq H^*(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^*(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^*(\mathbb{P}^1, O(2)),$$

d'où

$$\begin{aligned} H^1(Z, O(0,0,2)) \ = \ & H^1(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, O(2)) \\ & \oplus H^0(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^1(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, O(2)) \\ & \oplus H^0(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, O(0)) \otimes H^1(\mathbb{P}^1, O(2)). \end{aligned}$$

Comme

$$H^1(\mathbb{P}^1, O(0)) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(\mathbb{P}^1, O(2)) = 0,$$

nous en déduisons

$$H^1(Z, O(0,0,2)) = 0.$$

De même pour les autres H^1, d'où (iii).

(iv) La multiplication

$$H^0(Z, O(2,2,2)) \otimes H^0(Z, O(2,2,2) \otimes \omega_Z) \to H^0(Z, O^2(2,2,2) \otimes \omega_Z)$$

est surjective. En effet, on a

$$O(2,2,2) \otimes \omega_Z = O(0,0,0) \qquad O^2(2,2,2) \otimes \omega_Z = O(2,2,2).$$

Les critéres du Théorème 5.5 de [We2-88] sont donc vérifiés. □

A l'aide de cette proposition, étudions les fibres singulières des fibrations $p_i \colon S \to \mathbb{P}^1$.

PROPOSITION 1.4. *Soit S une surface lisse définie par une section de $O(2,2,2)$.*

(a) *Les fibres singulières de $p_i \colon S \to \mathbb{P}^1$ admettent au plus deux composantes irréductibles.*

(b) *Si S est un membre général de la famille considérée, les fibres singulières de $p_i \colon S \to \mathbb{P}^1$ sont irréductibles* (*de multiplicité* 1)*, et cette fibration n'admet pas de section.*

(c) *Il existe des surfaces S dont les fibres singulières de $p_i \colon S \to \mathbb{P}^1$ admettent deux composantes irréductibles qui fournissent des sections à la fibration $p_j \colon S \to \mathbb{P}^1$ pour $j \neq i$.*

DEMONSTRATION. Par symétrie, il suffit de démontrer la Proposition 1.4. pour la fibration $p_1 \colon S \to \mathbb{P}^1$. Commençons par (a).

Soit (G_1, G_2) la base de Pic$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ donnée par

$$G_1 = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1 \qquad G_2 = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}.$$

Soit F une fibre de la fibration $p_1 \colon S \to \mathbb{P}^1$ qui se décompose sous la forme

$$F = \sum_{i=1}^{n} m_i C_i \quad (m_i \in \mathbb{N}^*, \ \ C_i \text{ courbe irréductible}).$$

En tant que diviseur, F appartient à la classe de diviseurs D_1 (Pic$(S) \simeq NS(S))$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}(D_1 + D_2) \cdot F &= (D_1 + D_2) \cdot D_1 \\ &= \pi_{12}^*(G_1 + G_2) \cdot \pi_{12}^*(G_1) \\ &= 2(G_1 + G_2) \cdot G_1 \\ &= 2,\end{aligned}$$

et comme $D_1 + D_2$ est ample $(D_1 + D_2 = \pi_{12}^*(G_1 + G_2))$

$$(D_1 + D_2) \cdot C_i \geqslant 1.$$

Nous en déduisons donc que F admet au plus 2 composantes irréductibles, ce qui prouve (a).

Supposons maintenant que S est un membre général de la famille considérée et démontrons (b). Dans ces conditions, Pic(S) est engendré par D_1, D_2, et D_3. Par conséquent, toute intersection de diviseurs est paire puisque, pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, on a

$$D_i \cdot D_i = 0 \quad \text{et} \ \ D_i \cdot D_j = 2 \quad (i \neq j).$$

Ceci démontre (b) car

$$(D_1 + D_2) \cdot C_i \geqslant 1, \qquad (D_1 + D_2) \cdot C_i \leqslant 2,$$

et s'il existait une section C, on aurait $D_1 \cdot C = 1$.

Pour démontrer (c), exhibons une famille de surfaces S' vérifiant les propriétés énoncées en (c). Considérons la famille donnée par l'équation

$$\begin{aligned}&X_1^2(Y_1^2 Z_1^2 - Y_2^2 Z_2^2) + X_1 X_2 (Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_2^2)(Z_1^2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2) \\ &\quad + T X_2^2 (Y_1^2 + Y_2^2)(Z_1^2 + Z_2^2) = 0,\end{aligned}$$

où T parcours k. Ces surfaces S' sont lisses, sauf pour un nombre fini d'entres elles, comme nous l'avons vérifié sur le logiciel Macaulay. De plus, au point $(X_1, X_2) = (1, 0)$, la fibre F est l'union des courbes C_1 et C_2 définies par

$$\begin{aligned}&C_1 \colon Y_1 Z_1 + Y_2 Z_2 = 0, \\ &C_2 \colon Y_1 Z_1 - Y_2 Z_2 = 0.\end{aligned}$$

La fibre F admet donc bien 2 composantes irréductibles, C_1 et C_2, qui sont des sections pour les fibrations $p_2: S' \to \mathbb{P}^1$ et $p_3: S' \to \mathbb{P}^1$ lorsque S' est lisse. Elles sont décrites par

$$(Y_1, Y_2) \to (1, 0; Y_1, Y_2; Y_2, -Y_1),$$
$$(Y_1, Y_2) \to (1, 0; Y_1, Y_2; Y_2, Y_1). \qquad \square$$

Etudions maintenant les conséquences de l'action du sous-groupe $\mathcal{A}$ de Aut(S) engendré par σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} sur la géométrie de S. Nous ne supposons donc pas que S est un membre général de la famille considérée. Les techniques développées au terme de ce paragraphe sont celles employées par Silverman dans [Si91].

PROPOSITION 1.5. *Soit* $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ *avec* $i < j$. *Nous avons*

(a)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* D_k &= 2D_i + 2D_j - D_k, \\ \sigma_{ij}^* D_i &= D_i, \\ \sigma_{ij}^* D_j &= D_j. \end{aligned}$$

(b) *Dans la base* (D_1, D_2, D_3), *nous avons*

$$\sigma_{12}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{13}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{23}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^* = \sigma_{23}^* \sigma_{12}^* \sigma_{13}^* = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 15 & 6 \\ 2 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nous nous bornons à donner ces matrices pour des raisons de symétrie ainsi que les valeurs propres et vecteurs propres associés

- L'image inverse σ_{12}^* admet pour valeurs propres 1, 1, -1 de vecteurs propres respectifs D_1, D_2, $D_1 + D_2 - D_3$.
- L'image inverse $\sigma_{12}^* \sigma_{13}^*$ admet pour valeur propre triple 1 de vecteur propre D_1.
- Tout φ^*, produit de n termes σ_{12}^* et σ_{13}^*, admet pour valeurs propres 1, 1, $(-1)^n$.
- L'image inverse $\sigma_{23}^* \sigma_{12}^* \sigma_{13}^*$ admet pour valeurs propres -1, $9 + 4\sqrt{5}$, $9 - 4\sqrt{5}$ de vecteurs propres respectifs

$$D_1 + D_2 - 3D_3, \qquad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} D_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} D_2 + D_3,$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}D_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}D_2 + D_3.$$

En d'autres termes

$$\sigma^* E_1 = \alpha E_1 \qquad \sigma^* E_2 = \alpha^{-1} E_2.$$

Le fait que E_1 (respectivement E_2) est un vecteur propre de σ^* (respectivement de $(\sigma^{-1})^*$) associé à une valeur propre réelle plus grande que 1 est le point-clé qui permet de construire des hauteurs canoniques.

DEMONSTRATION. Déterminons (a) comme dans [Si91]. Soient (G_1, G_2) la base de Pic$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ et (H_1, H_2, H_3) la base de Pic$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, données par

$$\begin{aligned}
&G_1 = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1, \qquad G_2 = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\},\\
&H_1 = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \qquad H_2 = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\} \times \mathbb{P}^1,\\
&H_3 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}.
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^* D_1 &= \sigma_{12}^*(\pi_{12}^* G_1) = (\pi_{12} \circ \sigma_{12})^* G_1\\
&= \pi_{12}^* G_1 = D_1.
\end{aligned}$$

De même pour D_2.

Si P est un point fermé de S, en tant que zéro cycle, on a l'égalité

$$\pi_{12}^*(\pi_{12} P) = (P) + (\sigma_{12} P).$$

Ainsi, pour toute classe de diviseurs D de Pic(S), σ_{12} étant une involution, on a

$$\pi_{12}^* \pi_{12*}(D) = D + \sigma_{12*} D = D + \sigma_{12}^* D. \tag{1}$$

Or

$$\begin{aligned}
(\pi_{12*} D_3) \cdot G_1 &= \pi_{12*}(\pi_{13}^* G_2) \cdot G_1\\
&= \pi_{13}^* G_2 \cdot \pi_{12}^* G_1 \quad \text{(formule de projection)}\\
&= S \cdot H_3 \cdot H_1 \qquad \text{(intersection dans } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)\\
&= (2H_1 + 2H_2 + 2H_3) \cdot H_3 \cdot H_1\\
&= 2,
\end{aligned}$$

et de même

$$(\pi_{12*} D_3) \cdot G_2 = 2.$$

Puisque (G_1, G_2) est une base de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$

$$\pi_{12*}D_3 = 2G_1 + 2G_2.$$

En substituant dans la formule (1) ci-dessus, nous avons

$$\pi_{12}^*(2G_1 + 2G_2) = D_3 + \sigma_{12}^* D_3,$$

ou encore

$$\sigma_{12}^* D_3 = 2D_1 + 2D_2 - D_3.$$

On obtient de la même manière σ_{13}^* et σ_{23}^*. Ceci termine la démonstration de (a). L'assertion (b) n'est qu'un exercice simple d'algèbre linéaire. □

Intéressons-nous maintenant à l'action du sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(S)$ engendré par $\sigma = \sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{23}$, et associons à tout point fermé k-rationnel P de S, l'orbite de P sous l'action de G

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_G(P) = \{\phi P \mid \phi \in G\}.$$

De cette Proposition 1.5, nous déduisons deux corollaires, dont le premier correspond à la Proposition 1.4 de [Wa94].

COROLLAIRE 1.6. *Soit $\mathcal{C}$ une orbite sous G de S, de cardinal infini. Alors $\mathcal{C}$ est Zariski dense*.

COROLLAIRE 1.7. *Pour tout automorphisme ϕ de G, soit $\mathcal{F}_\phi$ l'ensemble des points fixes de ϕ*

$$\mathcal{F}_\phi = \{P \in S \mid \phi P = P\}.$$

Si ϕ n'est pas l'identité, $\mathcal{F}_\phi$ est fini.

L'idée de la démonstration des deux corollaires est la même, et comme les deux démonstrations sont identiques à celles de [Si91], nous renvoyons à [Si91] pour leur démonstration (voir également la démonstration du Lemme 3.1)

On peut, comme dans [Si91] caractériser les diviseurs effectifs de $\mathrm{Div}(S) \otimes \mathbb{R}$.

PROPOSITION 1.8. *Soit D un diviseur de* $\mathrm{Div}(S)\otimes\mathbb{R}$. *Considérons les* 3 *propriétés suivantes*

(i) *D est linéairement équivalent à un diviseur effectif non nul*.
(ii) *D est ample*.
(iii) $D \cdot E_1 > 0$ *et* $D \cdot E_2 > 0$.

Alors nous avons

(a) (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iii).
(b) *Si D est combinaison linéaire de E_1 et E_2:* (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

Nous en déduisons (voir [Si91]):

COROLLAIRE 1.9. *Soit C une courbe de S appartenant à une classe de diviseur engendrée par E_1 et E_2. Alors*

$$p_a(C) \geqslant 2.$$

En particulier, une fibre F et les sections, lorsqu'elles existent, de $p_i\colon S \to \mathbb{P}^1$ n'appartiennent pas à une classe de diviseurs de $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathbb{R}$ *engendrée par E_1 et E_2.*

2. Arithmétique de S sous l'action de G

Nous donnons ici les théorèmes analogues à ceux de [Si91] dont les démonstrations sont similaires à celles de [Si91]. Nous précisons également le calcul du minimum de $\hat{h}(P)$ (cf. Lemme 2.4), ce qui sera primordial au paragraphe suivant.

Le premier théorème établit l'existence des hauteurs canoniques h_1, h_2 et $\hat{h}$.

THEOREME 2.1. *Il existe une unique paire de fonctions h_1 et h_2 de $S(k)$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes*

(i) $h_1 = h_{E_1} + O(1),\ h_2 = h_{E_2} + O(1).$

(ii) $h_1 \circ \sigma = \alpha h_1,\quad h_1 \circ \sigma^{-1} = \alpha^{-1} h_1,$
$h_2 \circ \sigma = \alpha^{-1} h_2,\quad h_2 \circ \sigma^{-1} = \alpha h_2.$

(iii) *Définissons $\hat{h}$ par*

$$\hat{h} = h_1 + h_2.$$

Alors, $\hat{h}$ est une hauteur de Weil associée à la classe de diviseurs amples E.

(iv) *La fonction $h_1 h_2$ est G invariante*

$$h_1(\phi P) h_2(\phi P) = h_1(P) h_2(P) \ \ \forall \phi \in G.$$

(v) $h_1(P) \geqslant 0,\quad h_2(P) \geqslant 0 \ \ \forall P \in S(k).$

(vi) *Soit P un point k-rationnel de S. Alors*

$$h_1(P) = 0 \Longleftrightarrow h_2(P) = 0 \Longleftrightarrow \hat{h}(P) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{C}_G(P) \text{ est fini.}$$

La démonstration étant identique à celle de [Si91] nous renvoyons à [Si91] pour la démonstration de ce théorème (voir également [Ca-Si93]) ainsi que pour la démonstration des autres théorèmes de ce paragraphe.

Soit

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_G(P)$$

une orbite; définissons sa hauteur par

$$h(\mathcal{C}) = \sqrt{h_1(P)h_2(P)}.$$

L'assertion (iv) du Théorème 2.1 assure que cette définition est indépendante du choix du point P de $\mathcal{C}$ (note: notre définition est la racine carrée de celle de Silverman [Si91]).

On peut alors établir le théorème sur la finitude des orbites comme dans [Si91].

THEOREME 2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une orbite sous G de $S(k)$.*

(a) *$\mathcal{C}$ est finie $\Longleftrightarrow h(\mathcal{C}) = 0 \Longleftrightarrow \hat{h}(P) = 0$ pour tout point P de $\mathcal{C}$.*

(b) *Soit B un réel. Alors l'ensemble $\{\mathcal{C} \subset S(k) \mid h(\mathcal{C}) \leqslant B\}$ est fini. En particulier, il n'existe qu'un nombre fini d'orbites sous G finies.*

Rappelons que Wang a démontré qu'une orbite d'un point k-rationnel sous $\mathcal{A}$ est fini si $\hat{h}(P)$ est nulle, Proposition 1.5 et Lemme 2.3.3 de [Wa94] (note: si $\{\phi P \mid \phi \in \mathcal{A}\}$ est fini, alors $\{\phi P \mid \phi \in G\}$ l'est aussi).

Intéressons nous maintenant aux points k-rationnels d'une orbite infinie $\mathcal{C}$, au minimum de $\hat{h}(P)$ et à $N(\mathcal{C}, \hat{h}, B)$.

THEOREME 2.3. *Soit $\mathcal{C}$ une orbite de $S(k)$ de cardinal infini.*

(a) *Il existe une constante γ ne dépendant que de $\mathcal{C}$ (effectivement calculable en ne connaissant que $h_1(P)$ et $h_2(P)$ pour un point P de $\mathcal{C}$) vérifiant*

$$\min_{P \in \mathcal{C}} \hat{h}(P) = \gamma h(\mathcal{C})$$

avec

$$2 \leqslant \gamma < \alpha + \alpha^{-1} = 18.$$

(b) *Si $B < 2h(\mathcal{C})$, alors*

$$\operatorname{card}\{P \in \mathcal{C} \mid \hat{h}(P) \leqslant B\} = 0.$$

Si $B \geqslant 2h(\mathcal{C})$, alors

$$\left| \operatorname{card}\{P \in \mathcal{C} \mid \hat{h}(P) \leqslant B\} - 2\operatorname{Log}_\alpha \frac{B}{2h(\mathcal{C})} \right| \leqslant 2.$$

(c) *Pour tout diviseur ample D de S*

$$\operatorname{card}\{P \in \mathcal{C} \mid h_D(P) \leqslant B\} = 2\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{B}{2h(\mathcal{C})} + O(1)$$

(B *suffisamment grand*),

où $O(1)$ est une fonction bornée dépendant de S, de D et du choix de h_D; indépendante de $\mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle de [Si91], mais précisons l'assertion sur le minimum de la hauteur d'un point d'une orbite. Soient une orbite $\mathcal{C}$ et Q un point de $\mathcal{C}$, alors

$$\begin{aligned}\min_{P\in\mathcal{C}} \hat{h}P &= \min_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(\sigma^n Q)\\ &= \min_{n\in\mathbb{Z}} h_1(\sigma^n Q) + h_2(\sigma^n Q)\\ &= \min_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^n h_1(Q) + \alpha^{-n} h_2(Q).\end{aligned}$$

L'assertion (a) découle de cette égalité et du lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.4. *Soient A et B deux constantes strictement positives et f la fonction de $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$*

$$f(n) = \alpha^n A + \alpha^{-n} B.$$

Il existe une constante effectivement calculable γ à partir de A, B et α vérifiant

$$\min f(n) = \gamma\sqrt{AB} \quad \textit{avec} \;\; 2 \leqslant \gamma < \alpha + \alpha^{-1}.$$

Plus précisément, soit

$$\beta = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha \frac{B}{A} - \left[\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha \frac{B}{A}\right].$$

CAS 1. $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$.

Le minimum de $f(n)$ est atteint en un seul entier, $[\frac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha(B/A)]$, et ce minimum est

$$\min_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sqrt{AB}(\alpha^\beta + \alpha^{-\beta}) \quad (\gamma = \alpha^\beta + \alpha^{-\beta}).$$

CAS 2. $\frac{1}{2} < \beta < 1$.

Le minimum de $f(n)$ est atteint en un seul entier, $[\frac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha(B/A)] + 1$, et ce minimum est

$$\min_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sqrt{AB}(\alpha^{1-\beta} + \alpha^{\beta-1}) \quad (\gamma = \alpha^{1-\beta} + \alpha^{\beta-1}).$$

CAS 3. $\beta = \frac{1}{2}$.

Le minimum de $f(n)$ *est atteint en deux entiers,* $[\frac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha(B/A)]$ *et* $[\frac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha(B/A)] + 1$*, et ce minimum est*

$$\min_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sqrt{AB}(\alpha^{1/2} + \alpha^{-(1/2)}) \quad (\gamma = \alpha^{1/2} + \alpha^{-(1/2)}).$$

De plus (*ce sera important au paragraphe suivant*)

(i) *La fonction* f *est strictement décroissante sur* $\{n \in \mathbb{Z} \mid n < \frac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha(B/A)\}$.

(ii) *La fonction* f *est strictement croissante sur* $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > \frac{1}{2}\mathrm{Log}_\alpha(B/A)\}$.

Ceci termine la démonstration de l'assertion (a) du Théorème 2.3. Les assertions (b) et (c) se démontrent comme dans [Si91]. □

De l'assertion (a) du Théorème 2.2 et de l'assertion (b) du Théorème 2.3 nous déduisons le Théorème 2.5 (l'ensemble des points k-rationnels de S est égal à l'union disjointes des orbites $\mathcal{C}$ de $S(k)$).

THEOREME 2.5. *Posons*

$$S(k)_f := \{P \in S(k) \mid \hat{h}(P) = 0\} \quad (S(k)_f \textit{ est fini}).$$

Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}\{P \in S(k) \mid \hat{h}(P) \leqslant B\}\\ &\quad = \mathrm{card}\, S(k)_f + \sum_{\substack{\mathcal{C}\subset S(k)\\ 0<2h(\mathcal{C})\leqslant B}} \left[2\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{B}{2h(\mathcal{C})} + \xi(\mathcal{C})\right]\end{aligned}$$

avec $|\xi(\mathcal{C})| \leqslant 2$.

Les théorèmes établis ci-dessus et ceux du paragraphe suivant peuvent l'être pour d'autres groupes cycliques tels que $\langle\sigma_{23}\sigma_{13}\sigma_{12}\rangle$, $\langle\sigma_{13}\sigma_{23}\sigma_{12}\rangle$. Ils soulèvent d'intéressantes questions très similaires à celles des variétés abéliennes (borne pour les points de torsion, conjecture de Lang sur $\min_{\hat{h}(P)>0}\hat{h}(P)$ etc., cf. [Si91]).

Il serait intéressant de connaître l'arithmétique d'une orbite $\mathcal{C}_H$ sous un sous-groupe non cyclique de $\mathrm{Aut}(S)$, par exemple pour H sous-groupe engendré par $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{13}$ et $\sigma_{23}\sigma_{13}\sigma_{12}$. Malheureusement, nos tentatives sont restées infructueuses. Nous n'avons pas réussi à trouver des hauteurs canoniques se comportant bien par rapport à tous les automorphismes de H et à déterminer le stabilisateur d'un point (on voudrait comparer $N(\mathcal{C}_H(P), h_D, B)$ à $\mathrm{card}\{\phi \in H \mid h_D(\phi P) \leqslant B\}$). On peut néanmoins démontrer que si le stabilisateur de P sous l'action de H est trivial alors $N(\mathcal{C}_H(P), h_D, B) \gg B^{\mathrm{Log}_\alpha 3}$.

3. Etude arithmétique d'une union infinie de courbes rationnelles

Toute surface K3 admet une courbe $\bar{k}$-rationnelle, [Mo-Mu82], mais déterminer un corps de nombres k de définition est souvent un problème complexe. C'est le cas des surfaces étudiées par Silverman [Si91]. Dans notre situation, les surfaces K3 étant fibrées en courbes de genre 1, les fibres singulières fournissent des courbes $\bar{k}$-rationnelles dont on peut déterminer le corps de définition. Si l'on suppose que pour une surface K3 de [Si91] il existe une courbe k-rationnelle, les théorèmes que nous établissons ici peuvent l'être pour les surfaces de [Si91].

Nous supposons dans ce paragraphe qu'il existe T courbe k-rationnelle irréductible de S. Notons $O_T(1)$ le faisceau ample associé au sous-schéma fermé P, où P est un point non singulier de T [Ha70]. Notons $h_T(Q)$ la hauteur d'un point Q de T associée au faisceau ample $O_T(1)$.

Nous proposons ici d'étudier la répartition des points k-rationnels de

$$\Gamma = \bigcup_{\phi \in G} \phi T,$$

qui peut être interprété comme l'orbite de T sous l'action de G, ou comme l'ensemble des $\mathcal{C}$, orbites d'un point sous l'action de G, paramétrées par T.

Remarquons d'abord que Γ n'est pas une union finie de courbes.

LEMME 3.1. *L'orbite de T sous G est Zariski dense.*

DEMONSTRATION. Supposons le contraire. Soit donc n un entier naturel non nul tel que

$$\sigma^n(T) = T.$$

Puisque σ^n est de degré 1, nous déduisons que pour toute classe de diviseurs D de Pic$(S) \otimes \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T \cdot D &= (\sigma^n)^* T \cdot (\sigma^n)^* D \\ &= T \cdot (\sigma^n)^* D. \end{aligned}$$

En prenant D égal à E_i ($i \in \{1,2\}$), on obtient

$$T \cdot E_i = 0,$$

d'où

$$T \cdot (E_1 + E_2) = 0.$$

Or $E_1 + E_2$ est ample. Un tel entier n ne peut donc pas exister, d'où le lemme. $\square$

Pour estimer card$\{P \in \Gamma(k) \mid h_D(P) \leqslant B\}$, il est important d'avoir une idée de la répartition géométrique des points k-rationnels de Γ: si $\mathcal{C}$ est une orbite de Γ, on veut estimer card$\{Q \in \mathcal{C} \cap T\}$. Pour ce faire, on étudie le degré de T et de

$\sigma(T)$ par rapport à E_1 et à E_2.

THEOREME 3.2. *Supposons qu'il existe T courbe k-rationnelle de S. Soit Q un point de $T(k)$. Définissons le degré de T par rapport à E_1 et E_2 par*

$$a_1(T) := E_1 \cdot T, \qquad a_2(T) := E_2 \cdot T.$$

Nous avons

(i)

$$a_1(\sigma T) = \alpha a_1(T), \qquad a_2(\sigma T) = \alpha^{-1} a_2(T) \quad \text{et}$$
$$a_1(T) > 0, \qquad a_2(T) > 0.$$

Le produit $a_1(T)a_2(T)$ est donc G-invariant (il est $indépendant$ du $choix$ de la courbe k-rationnelle ϕT pour $\phi \in G$). Posons

$$a(\Gamma) = \sqrt{a_1(T)a_2(T)}.$$

(ii)

$$h_1(Q) \;=\; a_1(T)h_T(Q) + O(1),$$
$$h_2(Q) \;=\; a_2(T)h_T(Q) + O(1).$$

(iii)

$$h(\mathcal{C}(Q)) = a(\Gamma)h_T(Q) + O(1),$$

où les $O(1)$ sont des fonctions bornées ne dépendant que de S, T et du choix de h_T.

DEMONSTRATION. Commençons par (i). Nous avons

$$\begin{aligned} a_1(\sigma T) \;&=\; E_1 \cdot (\sigma T) \\ &=\; \sigma^* E_1 \cdot \sigma^*(\sigma T) \quad (\sigma \text{ isomorphisme}) \\ &=\; \alpha E_1 \cdot \sigma^*(\sigma T) \quad (\sigma^* E_1 = \alpha E_1) \\ &=\; \alpha E_1 \cdot T \quad (\sigma^*(\sigma T) = T) \\ &=\; \alpha a_1(T). \end{aligned}$$

De même pour $a_2(\sigma T)$.

D'après la Proposition 1.8, $a_1(T)$ et $a_2(T)$ sont strictement positifs, ce qui termine la démonstration de (i).

Pour démontrer (ii), considérons l'immersion canonique $i\colon T \hookrightarrow S$. Pour tout point Q de $T(k)$ on a donc

$$\begin{aligned} h_1(Q) &= h_{E_1}(iQ) + O(1) = h_{i^*E_1}(Q) + O(1) \\ &= a_1(T)h_T(Q) + O(1), \end{aligned}$$

avec $a_1(T) = E_1 \cdot T$. De même

$$h_2(Q) = a_2(T)h_T(Q) + O(1).$$

L'assertion (ii) est donc démontrée.

L'assertion (iii) est une conséquence élémentaire de la définition de $h(\mathcal{C}(Q))$ et de l'assertion (ii).

Par définition de $h(\mathcal{C}(Q))$ et de (ii) on a

$$\begin{aligned} h(\mathcal{C}(Q)) &= [(a_1(T)h_T(Q) + O(1))(a_2(T)h_T(Q) + O(1))]^{1/2} \\ &= [\sqrt{a_1(T)a_2(T)}h_T(Q)] \left[1 + \frac{O(1)}{h_T(Q)} + \frac{O(1)}{h_T^2(Q)}\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

où les $O(1)$ sont des fonctions bornées (on a choisi $h_T > 0$, cf. paragraphe 1). Etant donné que h_T est une hauteur de Weil associée à une classe de diviseurs amples, nous déduisons (iii) de l'égalité ci-dessus. □

Etablissons maintenant la finitude de card$\{Q \in \mathcal{C} \cap T(k)\}$.

THEOREME 3.3. *Soit $\mathcal{C} \subset S(k)$ une orbite sous G donnée. Supposons qu'il existe T courbe k-rationnelle de S. Alors*

(a) card$\{Q \in \mathcal{C} \cap T(k)\}$ *est fini.*
(b) *Il existe une constante c ne dépendant que de S et de T telle que*

$$h(\mathcal{C}) > c \Longrightarrow \text{card}\{Q \in \mathcal{C} \cap T(k)\} \leqslant 1.$$

Ainsi que l'a remarqué le rapporteur de cet article, ce théorème soulève deux questions

(i) Soit $\mathcal{C} \subset S$ une orbite sous G donnée. Alors, card$(\mathcal{C} \cap T)$ est-il fini? D'après le théorème ci-dessus, la réponse est oui si $\mathcal{C}$ est l'orbite d'un point quelconque de $S(\bar{\mathbb{Q}})$ sous G. Nous pensons que la réponse est encore oui pour $\mathcal{C} \subset S(\mathbb{C})$, mais nous ne savons pas le démontrer.

(ii) De même, $\{\mathcal{C} \mid \text{card}(\mathcal{C} \cap T) \geqslant 2\}$ est-il fini?

DEMONSTRATION. On peut supposer que $\mathcal{C}$ intersecte $T(k)$.

Soit Q un point k-rationnel de $\mathcal{C} \cap T$. L'assertion (iii) du Théorème 3.2 assure

$$h(\mathcal{C}) = a(\Gamma)h_T(Q) + O(1).$$

Les points de $\mathcal{C} \cap T(k)$ sont donc de hauteurs bornées. Ainsi, h_T étant une hauteur de Weil associée au faisceau ample $O_T(1)$, l'assertion (a) est démontrée.

Intéressons-nous à ce cardinal. Supposons maintenant que Q, point de $\mathcal{C} \cap T$, est de hauteur minimale, à savoir

$$\forall R \in \mathcal{C} \cap T(k), \qquad h_T(Q) \leqslant h_T(R).$$

Soit n un entier naturel tel que $\sigma^n(Q)$ appartienne à $\mathcal{C} \cap T(k)$. Nous avons

$$\begin{aligned} h_T(\sigma^n Q) &= \frac{1}{a_2(T)} h_2(\sigma^n Q) + O(1) \qquad (\text{Théorème } 3.2(\text{ii})) \\ &= \frac{\alpha^{-n}}{a_2(T)} h_2(Q) + O(1) \qquad (h_2(\sigma^n(Q) = \alpha^{-n} h_2(Q)) \\ &= \alpha^{-n} h_T(Q) + \alpha^{-n} O(1) + O(1) \qquad (\text{Théorème } 3.2(\text{ii})). \end{aligned}$$

Comme $h_T(Q) \leqslant h_T(\sigma^n Q)$, dès que $h_T(Q)$ (ou encore $h(\mathcal{C})$) est suffisamment grande, n est nécessairement nul. On fait de même lorsque n est négatif, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Rappelons ici la conjecture de Bogomolov qui stipule que tout point $\bar{k}$-rationnel de S appartient à une courbe $\bar{k}$-rationnelle. Ainsi, dans notre situation, conjecturalement, toute orbite $\mathcal{C} \subset S(k)$ rencontre une courbe $\bar{k}$-rationnelle.

Déduisons en à présent le théorème de comptage suivant.

THEOREME 3.4. *Supposons que S contient une courbe k-rationnelle T. Soit Γ l'orbite de T sous l'action de G. Soit $\mathcal{C}$ une orbite d'un point de $\Gamma(k)$ sous l'action de G. Posons*

$$\begin{aligned} a(\Gamma) &= \sqrt{a_1(T) a_2(T)} \qquad (\text{Théorème } 3.2) \\ H(\mathcal{C}) &= \exp h(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Alors

$$\operatorname{card}\{\mathcal{C} \subset \Gamma(k) \mid H(\mathcal{C}) \leqslant B\} \gg\ll B^{2/a(\Gamma)}.$$

DEMONSTRATION. Nous avons

$$\operatorname{card}\{\mathcal{C} \subset \Gamma(k) \mid H(\mathcal{C}) \leqslant B\} = \sum_{\substack{\mathcal{C} \subset \Gamma(k) \\ H(\mathcal{C}) \leqslant B}} 1.$$

Soient $\mathcal{C}$ une orbite de $\Gamma(k)$ et Q un point de $\mathcal{C} \cap T$. D'après l'assertion (iii) du Théorème 3.2

$$h(\mathcal{C}) \leqslant B \Longleftrightarrow a(\Gamma) h_T(Q) + O(1) \leqslant B.$$

Il existe donc une constante $c_0 > 0$, dépendant de S et de T, telle que

$$H_T(Q)^{a(\Gamma)} \leqslant c_0^{-1}B \Longrightarrow H(\mathcal{C}) \leqslant B,$$

$$H_T(Q)^{a(\Gamma)} \leqslant c_0 B \Longleftarrow H(\mathcal{C}) \leqslant B.$$

Le Théorème 3.3. implique donc

$$\sum_{\substack{\mathcal{C}\subset\Gamma(k)\\ H(\mathcal{C})\leqslant B}} 1 \gg \sum_{\substack{Q\in T(k)\\ H_T(Q)^{a(\Gamma)}\leqslant c_0^{-1}B}} 1,$$

$$\sum_{\substack{\mathcal{C}\subset\Gamma(k)\\ H(\mathcal{C})\leqslant B}} 1 \ll \sum_{\substack{Q\in T(k)\\ H_T(Q)^{a(\Gamma)}\leqslant c_0 B}} 1.$$

La démonstration du théorème est alors une conséquence immédiate du théorème suivant.

THEOREME 3.5 (Schanuel) [Sc79]. *Soient C une courbe k-rationnelle et D un diviseur ample de C de degré d. Alors*

$$\mathrm{card}\{P \in C(k) \mid H_D(P) \leqslant B\} \gg\ll B^{2/d}.$$

Remarque. Le théorème de Schanuel est plus précis. □

Pour estimer $N(\Gamma(k), H_D, B)$, le Théorème 3.3 n'est pas suffisant. Il est important de connaître la répartition du point (ou des points, lorsque $\gamma = \alpha^{1/2} + \alpha^{-(1/2)}$) P_0 (respectivement P_0 et P_0') de hauteur minimale d'une orbite $\mathcal{C}$ de $\Gamma(k)$

$$\begin{aligned} \hat{h}(P_0) &= \min_{P\in\mathcal{C}} \hat{h}(P) \\ &= \gamma h(\mathcal{C}) \qquad (\text{Théorème 2.3, Lemme 2.4}). \end{aligned}$$

Nous garderons ces notations pour la suite du paragraphe. Montrons que ces points appartiennent à une (ou deux dans un cas particulier) courbe k-rationnelle de E-degré 'minimal' (sauf pour un nombre fini d'entre eux).

PROPOSITION 3.6. *Parmi les courbes k-rationnelles, $\cup_{\phi\in G}\phi T$, il existe en général une unique courbe k-rationnelle T_0 (deux dans un cas particulier, T_0 et T_0') vérifiant*

$$\begin{aligned} a_1(T_0) + a_2(T_0) &= \min\{a_1(\phi T) + a_2(\phi T) \mid \phi \in G\} \\ &= \gamma a(\Gamma), \end{aligned}$$

avec

$$2 \leqslant \gamma < \alpha + \alpha^{-1}.$$

Il existe deux courbes T_0 et T_0' vérifiant cette assertion si et seulement si

$$\gamma = \alpha^{1/2} + \alpha^{-(1/2)}.$$

DEMONSTRATION. En effet, vu l'assertion (i) du Théorème 3.2, nous avons

$$a_1(T_0) + a_2(T_0) = \min_{n \in \mathbb{Z}} \alpha^n a_1(T) + \alpha^{-n} a_2(T).$$

La proposition ci-dessus est donc une conséquence directe du Lemme 2.4. □

Nous dirons que T_0 est la courbe k-rationnelle de Γ de degré minimal par rapport à E (de même pour T_0' si elle existe).

THEOREME 3.7. *Supposons que S contient une courbe k-rationnelle T. Soit Γ l'orbite de T sous l'action de G. Soit $\mathcal{C}$ une orbite d'un point k-rationnel de Γ sous l'action de G. Alors*

(i) *Soit T_0 la courbe k-rationnelle de Γ de degré minimal par rapport à E (que nous supposons unique). Il existe une constante c ne dépendant que de S et de T vérifiant*

$$h(\mathcal{C}) > c \Longrightarrow P_0 \in T_0,$$

où P_0 est l'unique point de $\mathcal{C}$ satisfaisant

$$\hat{h}(P_0) = \min_{P \in \mathcal{C}} \hat{h}(P).$$

(ii) *Soient T_0 et T_0' les deux courbes k-rationnelles de Γ de degré minimal par rapport à E ($\gamma = \alpha^{1/2} + \alpha^{-(1/2)}$ dans la Proposition 3.6). Dans ce cas,* $\min_{P \in \mathcal{C}} \hat{h}(P)$ *est atteint en un ou deux points de $\mathcal{C}$. Le(s) point(s) correspondant à ce minimum appartienne(nt) à T_0 ou (et) T_0' dès que $h(\mathcal{C})$ est suffisamment grande.*

Nous discuterons de l'éventualité du cas (ii) à la fin de la démonstration.

DEMONSTRATION. Soit donc T, d'où $a_1(T)$, $a_2(T)$ et la fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$

$$f(n) = \alpha^n a_1(T) + \alpha^{-n} a_2(T).$$

Soient maintenant une constante c_1, $\mathcal{C}$ une orbite de $\Gamma(k)$ telle que $h(\mathcal{C}) > c_1$, et Q le point de $\mathcal{C} \cap T(k)$ (le Théorème 3.3 assure l'existence de c_1), d'où la fonction f' de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(n) &= \alpha^n h_1(Q) + \alpha^{-n} h_2(Q) \\ &= \alpha^n a_1(T) h_T(Q) + \alpha^{-n} a_2(T) h_T(Q) + O(\alpha^n + \alpha^{-n}). \end{aligned}$$

Pour démontrer le Théorème 3.7, il suffit de montrer que f et f' atteignent leur minimum au(x) même(s) entier(s). Posons

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)}{a_1(T)} - \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)}{a_1(T)}\right],$$

$$\beta'(\mathcal{C}) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{h_2(Q)}{h_1(Q)} - \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{h_2(Q)}{h_1(Q)}\right],$$

alors

$$\begin{aligned}\beta'(\mathcal{C}) \;=\; & \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)h_T(Q)+O(1)}{a_1(T)h_T(Q)+O(1)} \\ & - \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)h_T(Q)+O(1)}{a_1(T)h_T(Q)+O(1)}\right].\end{aligned}$$

Appliquons donc le Lemme 2.4 à f et f'. Distinguons 4 cas.

CAS 1. $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

On a

$$\lim_{h_T(Q)\to\infty} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)h_T(Q)+O(1)}{a_1(T)h_T(Q)+O(1)} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)}{a_1(T)}. \tag{1}$$

Puisque $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha a_2(T)/a_1(T)$ n'est pas un entier ($\beta \neq 0$), nous déduisons

$$\lim_{h_T(Q)\to\infty} \beta'(\mathcal{C}) = \lim_{h(\mathcal{C})\to\infty} \beta'(\mathcal{C}) = \beta. \tag{2}$$

Il existe donc une constante $c_2 > c_1$ telle que si $h(\mathcal{C}) > c_2$, on ait

$$0 < \beta'(\mathcal{C}) < \tfrac{1}{2} \quad \text{et}$$

$$n_0 := \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{a_2(T)}{a_1(T)}\right] = \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{h_2(Q)}{h_1(Q)}\right].$$

Le Lemme 2.4 implique que le minimum de f et f' est, dans ces conditions, atteint en l'unique entier n_0. Dans ce cas, le Théorème 3.7, assertion (i), est démontré

$$T_0 = \sigma^{n_0}(T), \qquad P_0 = \sigma^{n_0}(Q).$$

CAS 2. $\frac{1}{2} < \beta < 1$.

Le cas est identique au cas ci-dessus, on a

$$T_0 = \sigma^{n_0+1}(T), \qquad P_0 = \sigma^{n_0+1}(Q).$$

CAS 3. $\beta = 0$.

L'égalité (1) est toujours vraie, mais la suite $\beta'(\mathcal{C})$ admet deux valeurs d'adhérence: 0 et 1. Dès que $h(\mathcal{C})$ est suffisamment grande, on a donc

(a) $0 \leqslant \beta'(\mathcal{C}) < \frac{1}{2}$

$$\left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{h_2(Q)}{h_1(Q)}\right] = n_0, \qquad P_0 = \sigma^{n_0}(Q), \quad \text{ou}$$

(b) $\frac{1}{2} < \beta'(\mathcal{C}) < 1$

$$\left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}_\alpha \frac{h_2(Q)}{h_1(Q)}\right] = n_0 - 1, \qquad P_0 = \sigma^{n_0}(Q).$$

Nous avons bien

$$T_0 = \sigma^{n_0}(T), \qquad P_0 = \sigma^{n_0}(Q).$$

Ceci achève donc la démonstration de l'assertion (i) du théorème. L'assertion (ii) découle du cas 4.

CAS 4. $\beta = \frac{1}{2}$.

Posons

$$\sigma^{n_0}(T) = T_0, \qquad \sigma^{n_0}(Q) = P_0,$$

$$\sigma^{n_0+1}(T) = T_0', \qquad \sigma^{n_0+1}(Q) = P_0'.$$

D'où

$$a_1(T_0) + a_2(T_0) = a_1(T_0') + a_2(T_0') = \min\{a_1(\phi T) + a_2(\phi T) \mid \phi \in G\}.$$

Mais il n'est a priori pas possible de comparer $\hat{h}(P_0)$ et $\hat{h}(P_0')$ sans informations supplémentaires. La seule chose que l'on sache est que le(s) point(s) où $\min_{P \in \mathcal{C}} \hat{h}(P)$ est atteint est (sont) P_0 ou (et) P_0' dès que $h(\mathcal{C})$ est suffisamment grande.

Ceci est suffisant pour achever la démonstration, mais terminons par l'éventualité de ce cas.

Lorsque T est une fibre singulière irréductible, ou une composante irréductible d'une fibre réductible, de $p_i\colon S \to \mathbb{P}^1$, nous avons vérifié, en estimant $T \cdot E$, que ce cas ($\beta = \frac{1}{2}$) était impossible.

Toutefois, si T est une courbe k-rationnelle quelconque, en n'étudiant que $T \cdot E$, il n'est a priori pas possible d'exclure ce cas, d'autant plus qu'il est facile de construire des diviseurs effectifs D tels que si l'on note

$$a_1(D) = E_1 \cdot D, \qquad a_2(D) = E_2 \cdot D,$$

alors

$$\beta(D) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}_\alpha \frac{a_2(D)}{a_1(D)} - \left[\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}_\alpha \frac{a_2(D)}{a_1(D)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}. \qquad \square$$

Ayant établi la répartition des points de hauteur minimale d'une orbite $\mathcal{C}$ de $\Gamma(k)$, on peut décrire la répartition des points de $\Gamma(k)$.

THEOREME 3.8. *Supposons qu'il existe T courbe k-rationnelle de S. Soit Δ une classe de diviseurs amples de* $\operatorname{Pic}(S)$. *Soit $\varepsilon > 0$. Notons*

$$\Gamma(\Delta,\varepsilon) = \bigcup_{\substack{\phi\in G\\ \phi T\cdot\Delta<2/\varepsilon}} \phi T.$$

Alors $\Gamma(\Delta,\varepsilon)$ est une union finie de courbes k-rationnelles vérifiant

$$\operatorname{card}\{Q\in\Gamma(k) \mid H_\Delta(Q)\leqslant B\}$$
$$= \operatorname{card}\{Q\in\Gamma(\Delta,\varepsilon)(k) \mid H_\Delta(Q)\leqslant B\} + O(B^\varepsilon).$$

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer ce théorème pour la classe de diviseurs E ($E = D_1 + D_2 + 2D_3$, cf. Paragraphe 1). En effet, soit Δ une classe de diviseurs amples. Il existe donc un réel $c > 0$ tel que, pour tout point Q de $S(k)$, on ait

$$c^{-1}\hat{h}(Q) \leqslant h_\Delta(Q) \leqslant c\hat{h}(Q),$$

où $\hat{h}$ est associée à E (cf. Théorème 2.1).

Ainsi pour toute partie X de S, si l'on note $X(k) = X\cap S(k)$, on a

$$N(X(k),\widehat{H},B^{1/c}) \leqslant N(X(k),H_\Delta,B) \leqslant N(X(k),\widehat{H},B^c). \tag{1}$$

Supposons que le Théorème 3.8 est vérifié par E. Soit $\varepsilon' > 0$. Alors

$$N(\Gamma(k),\widehat{H},B) = N(\Gamma(E,\varepsilon'),\widehat{H},B) + O(B^{\varepsilon'}),$$

d'où

$$N(\Gamma(k),H_\Delta,B) = N(\Gamma(E,\varepsilon'),H_\Delta,B) + O(B^{\varepsilon' c}),$$

(on applique (1) avec: $X = S\setminus\Gamma(E,\varepsilon')$).

Soient $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \varepsilon/c$. Ainsi, si le Théorème 3.8 est vérifié par E, $\Gamma(E,\varepsilon')$ étant une union finie de courbes k-rationnelles, d'après le Théorème 3.5 de Schanuel, il l'est par Δ.

Démontrons le Théorème 3.8 pour E.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 3.2 et le Lemme 2.4, il existe deux entiers naturels, r et s, vérifiant

$$\Gamma(E,\varepsilon) = \bigcup_{n_0-r<i<n_0+s} \sigma^i(T)$$

avec

$$\sigma^{n_0}(T) = T_0,$$

(T_0 la courbe k-rationnelle de E degré minimal, Théorème 3.7) et où l'on pose, pour r ou s nul (ε grand)

$$\Gamma(E,\varepsilon) = \emptyset.$$

Donc, $\Gamma(E,\varepsilon)$ est bien une union finie de courbes k-rationnelles. Posons

$$\begin{aligned} T_r &= \sigma^{n_0-r}(T), \qquad T_s = \sigma^{n_0+s}(T),\\ \Gamma^{r,s} &= \Gamma\backslash\Gamma(E,\varepsilon),\\ \mathcal{C}^{r,s} &= \mathcal{C}\cap\Gamma^{r,s}. \end{aligned}$$

Pour démontrer le Théorème 3.8, il nous reste donc à démontrer

$$N(\Gamma^{r,s},\widehat{H},B) \ll B^{\varepsilon}.$$

Or le Lemme 2.4 et le Théorème 3.7 impliquent qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, dès que $h(\mathcal{C}) > c$

$$\min_{P\in\mathcal{C}^{r,s}} \hat{h}(P) = \begin{cases} \hat{h}(\sigma^{n_0-r}P_0) & \text{ou} \\ \hat{h}(\sigma^{n_0+s}P_0), \end{cases}$$

(où P_0 est l'unique point de $\mathcal{C}\cap T_0$). On en déduit que, dès que $h(\mathcal{C}) > c$, on a

$$\widehat{H}(\sigma^{n_0-r}P_0) > B \quad \text{et} \quad \widehat{H}(\sigma^{n_0+s}P_0) > B \Longrightarrow N(\mathcal{C}^{r,s},\widehat{H},B) = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} N(\Gamma^{r,s},\widehat{H},B) \ll & \sum_{\substack{Q\in T_r(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B}} N(\mathcal{C}^{r,s}(Q),\widehat{H},B) \\ & + \sum_{\substack{Q\in T_s(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B}} N(\mathcal{C}^{r,s}(Q),\widehat{H},B). \end{aligned}$$

Or, par définition de $\Gamma(E,\varepsilon)$, on a

$$T_r \cdot E \geqslant \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad T_s \cdot E \geqslant \frac{2}{\varepsilon}.$$

Pour démontrer le Théorème 3.8, il suffit donc de démontrer le lemme suivant

LEMME 3.9. *Soit T' une courbe k-rationnelle de S. Alors*

$$\sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B}} N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B) \ll B^{2/(T'\cdot E)}.$$

En effet, écrivons

$$\sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B}} N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B)$$

$$= \sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B^{1/2}}} N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B) + \sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ B^{1/2}<\widehat{H}(Q)\leqslant B}} N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B),$$

et majorons maintenant $N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B)$.

D'après le Théorème 2.3 et le Théorème 3.2, si $h(\mathcal{C}(Q))>0$, nous avons

$$N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B) \leqslant 2\operatorname{Log}_\alpha \frac{\operatorname{Log} B}{2h(\mathcal{C}(Q))} + 2,$$

$$h(\mathcal{C}(Q)) = a(\Gamma')h_{T'}(Q) + O(1) \qquad \left(a(\Gamma') = \sqrt{a_1(T')a_2(T')}\right).$$

Lorsque $h(\mathcal{C}(Q)) \neq 0$, on peut minorer $h(\mathcal{C}(Q))$ par une constante strictement positive (Théorème 2.2). D'où une constante γ_1 telle que

$$\widehat{H}(Q) \leqslant B^{1/2} \Longrightarrow N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B) \leqslant 2\operatorname{Log}_\alpha \operatorname{Log} B + \gamma_1,$$

(valable même si $h(\mathcal{C}) = 0$ d'après le Théorème 2.2).

Lorsque $\widehat{H}(Q) \geqslant B^{1/2}$ on a

$$h(\mathcal{C}(Q)) \geqslant \tfrac{1}{2}a(\Gamma')\operatorname{Log} B + O(1).$$

D'où une constante γ_2 telle que

$$B^{1/2} < \widehat{H}(Q) \Longrightarrow N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B) \leqslant \gamma_2.$$

Notre majoration cherchée devient donc

$$\sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B}} N(\mathcal{C}(Q),\widehat{H},B)$$

$$\ll \sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ \widehat{H}(Q)\leqslant B^{1/2}}} (2\operatorname{Log}_\alpha \operatorname{Log} B+\gamma_1) + \sum_{\substack{Q\in T'(k)\\ B^{1/2}<\widehat{H}(Q)\leqslant B}} \gamma_2.$$

D'où le Lemme 3.9 par le Théorème 3.2 et le Théorème 3.5 de Schanuel, achevant la démonstration. □

Ce théorème est similaire au Théorème III de [Ca94] étudiant les points rationnels des sections d'une surface elliptique. De plus, il est compatible avec une conjecture de Batyrev et Manin.

CONJECTURE [Ba-Ma90]. *Soient V une surface* K3*, D un diviseur ample de V, $\varepsilon>0$ un réel, $V(D,\varepsilon)$ le fermé propre de Zariski de V constitué des courbes k-rationnelles de degré $<2/\varepsilon$ par rapport à D. Alors*

$$\operatorname{card}\{P\in V(k)\mid H_D(P)\leqslant B\}$$
$$=\operatorname{card}\{P\in V(D,\varepsilon)(k)\mid H_D(P)\leqslant B\}+O(B^\varepsilon).$$

Terminons ce paragraphe en remarquant que

$$\operatorname{card}\{\phi T\mid \phi\in G, \phi T\cdot E\leqslant B\}$$
$$=2\operatorname{Log}_\alpha \frac{B}{a(\Gamma)}+\xi(\mathcal{C})\quad (|\xi(\mathcal{C})|\leqslant 2).$$

Cette égalité est une conséquence du Théorème 3.2 et du Lemme de [Si91] page 366.

4. Cardinal des points de hauteur bornée sur certaines surfaces K3

Nous proposons ici d'évaluer $\operatorname{card}\{P\in S(k)\mid H_D(P)\leqslant B\}$ lorsque S vérifie une hypothèse géométrique supplémentaire, et que D appartient à une famille de classes de diviseurs amples de $\operatorname{Pic}(S)\otimes\mathbb{R}$.

THEOREME 4.1. *Soient i et j appartenant à $\{1,2,3\}$, avec i distinct de j. Soit S une surface* K3 *de notre famille telle que la fibration $p_i\colon S\to\mathbb{P}^1$ en courbes de genre* 1 *admette des fibres ayant deux composantes irréductibles k-rationnelles. Soient $x_i>0$ et $x_j>0$, deux réels, vérifiant $x_i>x_j$. Posons*

$$D=x_iD_i+x_jD_j\quad (\textit{rappelons que } D_i=p_i^*\{\infty\}, D_j=p_j^*\{\infty\}).$$

Alors

$$\operatorname{card}\{P \in S(k) \mid H_D(P) \leqslant B\} \gg\ll B^{(2/x_j)}.$$

Rappelons que la Proposition 1.4 fournit des exemples de telles surfaces.

DEMONSTRATION. Démontrons-le pour $i = 1$ et $j = 2$. Par symétrie, on déduit les autres cas.

Commençons par la minoration. Soit F une telle fibre admettant deux composantes irréductibles

$$F = C + C' \quad (C \text{ et } C', \text{ deux courbes } k-\text{rationnelles irréductibles}).$$

Nous avons vu lors de la démonstration de la Proposition 1.4

$$D_1 \cdot C = D_1 \cdot C' = 0,$$

$$D_2 \cdot C = D_2 \cdot C' = 1,$$

d'où

$$D \cdot C = D \cdot C' = x_2.$$

Du Théorème 3.5 de Schanuel, nous déduisons

$$\operatorname{card}\{P \in F(k) \mid H_D(P) \leqslant B\} \gg\ll B^{(2/x_2)},$$

d'où notre minoration.

Interessons nous à la majoration maintenant. Soit $\Delta \in \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \otimes \mathbb{R}$ défini par:

$$\Delta = x_1\{\infty\} \times \mathbb{P}^1 + x_2\mathbb{P}^1 \times \{\infty\},$$

d'où

$$D = \pi_{12}^* \Delta.$$

Ainsi

$$N(S(k), H_D, B) \gg\ll N(S(k), H_{\pi_{12}^*\Delta}, B),$$

ou encore

$$N(S(k), H_D, B) \ll N(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1(k), H_\Delta, B).$$

Or il est immédiat, d'après le Théorème de Schanuel ([Sc79]), que

$$N(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1(k), H_\Delta, B) \ll B^{(2/x_2)}, \quad (x_1 > x_2).$$

D'où notre majoration. $\square$

Ce théorème est donc compatible avec la conjecture de Batyrev–Manin: les ordres de grandeurs de card$\{P \in S(k) \mid H_D(P) \leqslant B\}$ sont les mêmes. Toutefois, dans notre situation, nous ne savons pas comment sont répartis les points k-rationnels d'un ouvert de Zariski quelconque. Existe-t-il $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout ouvert de Zariski non vide, le nombre de points k-rationnels de hauteur au plus B soit minoré par B^ε? D'après la conjecture de Batyrev–Manin, la réponse à cette question est négative.

Références

[Ba-Ma90] Batyrev, V. and Manin, J.: Sur le nombre des points rationnnels de hauteur bornée des variétés algébriques, *Math. Ann.* 286 (1990) 27–43.

[Be78] Beauville, A.: Surfaces algébriques complexes, *Astérique* 54 (1978).

[Ca94] Call, G.: Counting Geometric Points on Families of Abelian Varieties, *Math. Nach.* 166 (1994) 167–192.

[Ca-Si93] Call, G. and Silverman, J.: Canonical Heights on Varieties with Morphisms, *Compo. Math.* 89 (1993) 163–205.

[Co-Si86] Cornell, G. and Silverman, J. (Eds): *Arithmetic Geometry*, Springer-Verlag (1986).

[Ha70] Hartshorne, R.: Ample subvarieties of algebraic varieties, *Springer Lecture Notes* 156 (1970).

[La83] Lang, S.: *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer-Verlag (1983).

[Mo-Mu82] Mori, S. and Mukai, S.: The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11, Appendice, dans: Algebraic geometry, eds. M. Raynaud, T. Shioda, *Springer Lecture Notes* 1016 (1983) 334–352.

[Sc79] Schanuel, S.: Heights in number fields, *Bull Soc. Math. France* 107 (1979) 433–449.

[Si83] Silverman, J.: Heights and the specialization map for families of Abelian varieties, *J. Reine Angew. Math.* 342 (1983) 197–211.

[Si91] Silverman, J.: Computing heights on K3 surfaces: a new canonical height, *Invent. Math.* 105 (1991) 347–373.

[Wa94] Wang, L.: *Rational points and canonical heights on varieties with many elliptic fibrations*, Thèse, Université de Harvard (1994).

[We1-88] Wehler, J.: K3-surfaces with Picard number 2, *Arch. Math.* 50 (1988) 73–82.

[We2-88] Wehler, J.: Hypersurfaces of the Flag Variety, *Math. Zeit.* 198 (1988) 21–38.